

Бодлого 1. $(y^2 - 2x^2)^2 = 2y^2 + x + y$ тэгшитгэл натурал тоон олонлогт шийдгүйг батал.

Бодолт: Хэрэв $y \geq 3x$ бол $x \geq 1$ тул $y \geq 3$ байна. Энэ үед $x \leq \frac{y}{3}$ тул тэгшитгэлийн зүүн талыг зааглавал:

$$y^2 - 2x^2 \geq y^2 - 2\left(\frac{y}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}y^2$$

Квадрат зэрэгт дэвшүүлж, анхны тэгшитгэлд орлуулбал:

$$\frac{49}{81}y^4 \leq (y^2 - 2x^2)^2 = 2y^2 + x + y \leq 2y^2 + \frac{y}{3} + y$$

Хоёр талыг y -д ($y > 0$) хувааж эмхэтгэвэл $49y^3 \leq 162y + 108$ гарах бөгөөд үүнээс $y \leq 2$ болно. Гэтэл энэ нь анхны $y \geq 3$ нөхцөлтэй зөрчилдөж байна.

$y < 3x$ байх үед анхны тэгшитгэлийн хоёр тал дээр $-2(y^2 - 2x^2) + 1$ нэмж, бүтэн квадрат ялгавал:

$$(y^2 - 2x^2)^2 - 2(y^2 - 2x^2) + 1 = 2y^2 + x + y - 2(y^2 - 2x^2) + 1$$

$$(y^2 - 2x^2 - 1)^2 = 4x^2 + x + y + 1$$

$x, y \geq 1$ натурал тоонууд тул баруун тал $(2x)^2 = 4x^2$ -аас ямагт их байна. Мөн $y < 3x$ буюу $x + y < 4x$ тул баруун талыг дээрээс нь зааглавал:

$$4x^2 + x + y + 1 < 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

Дээрх зааглалтуудыг нэгтгэвэл:

$$(2x)^2 < (y^2 - 2x^2 - 1)^2 < (2x + 1)^2$$

Бүхэл тооны квадрат $(y^2 - 2x^2 - 1)^2$ нь дараалсан хоёр бүхэл тооны квадратын $((2x)^2$ болон $(2x + 1)^2$) яг завсар орших боломжгүй тул зөрчил үүсэв.

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- (1) $y \geq 3x$ үед шийдгүйг баталсан (жишээлбэл зааглах аргаар $y \leq 2$ зөрчилд хүрсэн) бол — 2 оноо
- (2) Анхны тэгшитгэлийг $(y^2 - 2x^2 - 1)^2 = 4x^2 + x + y + 1$ гэсэн бүтэн квадрат ялгасан хэлбэрт оруулсан бол — 2 оноо
- (3) $y < 3x$ үед баруун талыг $(2x)^2 < 4x^2 + x + y + 1 < (2x + 1)^2$ гэж заагласан бол — 2 оноо
- (4) Дараалсан хоёр квадратын завсар бүхэл тооны квадрат оршихгүй гэдгийг дурдаж, шийдгүй болохыг бүрэн дүгнэж баталсан бол — 1 оноо

Бодлого 2. Сүлд буух магадлал нь тус бүрдээ $\frac{1}{2}$ байх албагүй 2026 зоос байв. Бүгдийг нь зэрэг орхих үед сүлд буусан зоосны тоо тэгш байх магадлал нь $\frac{1}{2}$ байдаг бол сүлд буух магадлал нь $\frac{1}{2}$ -тэй тэнцүү байх ядаж нэг зоос олдохыг батал.

Бодолт: I арга: Зоос тус бүрийн сүлд буух магадлалыг $p_1, p_2, \dots, p_{2026}$ гэе. Эхний 2025 зоосыг орхиход сүлд буусан зоосны тоо нь тэгш байх магадлалыг p^* гэе. Тэгвэл

$$p^* \cdot (1 - p_{2026}) + (1 - p^*) \cdot p_{2026} = \frac{1}{2}$$

тэнцэтгэл үүснэ. Энэ тэнцэтгэлийг хувиргавал

$$\begin{aligned} p^* - p^* \cdot p_{2026} + p_{2026} - p^* \cdot p_{2026} &= \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 4p^* \cdot p_{2026} - 2p_{2026} - 2p^* + 1 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2p^* - 1)(2p_{2026} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

болно. $p_{2026} \neq \frac{1}{2}$ гэвэл $p^* = \frac{1}{2}$ гэж гарна. Энэ мэтчилэн $i > 1$ үед $p_i \neq \frac{1}{2}$ гэвэл $p_1 = \frac{1}{2}$ байх ёстой болно.

II арга: Зоос тус бүрийн сүлд буух магадлалыг $p_1, p_2, \dots, p_{2026}$ гэе. Тэгвэл тухайн зоос тоо буух магадлал $1 - p_i$ байна. Дараах үүсгэгч функцийг авч үзье.

$$P(x) = \prod_{i=1}^{2026} ((1 - p_i) + p_i x).$$

Энэхүү олон гишүүнтийг хаалт задлан бичвэл x^k -ийн өмнөх коэффициент нь яг k ширхэг зоос сүлд буух магадлалтай тэнцүү байна. Өөрөөр хэлбэл

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{2026} x^{2026}$$

Энд c_k нь яг k зоос сүлд буух магадлал юм. Одоо $x = 1$ болон $x = -1$ үеийн утгуудыг тооцоолбол $P(1) = c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_{2026} = 1$ ба

$$P(-1) = (c_0 + c_2 + c_4 + \dots) - (c_1 + c_3 + c_5 + \dots) = P_{\text{тэгш}} - P_{\text{сондгой}}$$

Энд $P_{\text{тэгш}}$ нь сүлд буусан зоосны тоо тэгш байх магадлал, $P_{\text{сондгой}}$ нь сондгой байх магадлал болно. Бид $P_{\text{тэгш}} + P_{\text{сондгой}} = 1$ болохыг мэднэ. Тэгвэл

$$P(-1) = P_{\text{тэгш}} - (1 - P_{\text{тэгш}}) = 2P_{\text{тэгш}} - 1$$

Бодлогын нөхцөл ёсоор $P_{\text{тэгш}} = \frac{1}{2}$ тул

$$P(-1) = 2 \left(\frac{1}{2} \right) - 1 = 0$$

болно. Нөгөө талаас, $P(x)$ -ийн анхны үржвэр хэлбэрт $x = -1$ гэж орлуулбал:

$$P(-1) = \prod_{i=1}^{2026} ((1 - p_i) + p_i(-1)) = \prod_{i=1}^{2026} (1 - 2p_i)$$

Гарсан хоёр үр дүнгээ тэнцүүлбэл:

$$\prod_{i=1}^{2026} (1 - 2p_i) = 0$$

Үржвэр 0 гарахын тулд түүний үржигдэхүүнүүдийн ядаж нэг нь заавал 0 байх шаардлагатай. Иймд ямар нэгэн $k \in \{1, 2, \dots, 2026\}$ хувьд:

$$1 - 2p_k = 0 \implies p_k = \frac{1}{2}$$

болж, сүлд буух магадлал нь $\frac{1}{2}$ байх ядаж нэг зоос олдох нь батлагдав.

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- Үүсгэгч функц $P(x) = \prod_{i=1}^{2026} ((1-p_i) + p_i x)$ -ийг тодорхойлж, коэффициентуудын утгыг (магадлалыг) тайлбарласан бол — 2 оноо
- $P(-1)$ утгыг задалж $P(-1) = P_{\text{тэгш}} - P_{\text{сондгой}}$ болохыг харуулсан бол — 1 оноо
- $P_{\text{тэгш}} + P_{\text{сондгой}} = 1$ болон бодлогын нөхцөлийг ашиглан $P(-1) = 0$ болохыг гаргасан бол — 1 оноо
- Үүсгэгч функцийн анхны хэлбэрт $x = -1$ -ийг орлуулж $P(-1) = \prod_{i=1}^{2026} (1 - 2p_i)$ болохыг харуулсан бол — 2 оноо
- Дээрх хоёр үр дүнг тэнцүүлж $\prod_{i=1}^{2026} (1 - 2p_i) = 0$ гаргаад, үүнээс ядаж нэг зоосны хувьд $p_k = \frac{1}{2}$ гэдгийг бүрэн баталсан бол — 1 оноо

Бодлого 3. Шулуун дээр хэд хэдэн цэг тэмдэглэжээ. B цэг нь AC хэрчим дээр орших дурын тэмдэглэгдсэн A, B, C цэгүүдийн хувьд $\frac{AB}{BC} \leq 4$ нөхцөл биелдэг бол уг шулуун дээр хамгийн олондоо хэдэн цэг тэмдэглэж болох вэ?

Бодолт: Хамгийн ихдээ 7 цэг тэмдэглэж болно. Жишээ нь тоон шулууны 0, 5, 9, 12, 15, 19, 24 координаттай цэгүүдийг тэмдэглэе. Хөрш цэгүүдийн хоорондох зай 5, 4, 3, 3, 4, 5 байна. Эдгээр цэгүүдээс сонгосон дурын гурвалын хувьд нөхцөл биелдэг гэдгийг шалгахад төвөггүй. Хамгийн их харьцаа нь (0, 12, 15) ба (9, 12, 24) гурвалуудад гарах бөгөөд 4-тэй тэнцүү байна.

Одоо 8 цэг тэмдэглэж болохгүй гэдгийг харуулъя. Эсрэгээр нь 8 цэг тэмдэглэж болно гэж үзээд, тэдгээрээр үүсэх 7 хэрчмийн уртыг зүүнээс эхлэн a, b, c, d, e, f, g ба $a + b + c + d + e + f + g = 1$ гэе. Бодлогын нөхцөлийн дагуу $a \geq \frac{1}{5}$, $4d \geq a + b + c$, $4d \geq e + f + g$ учир $d \geq \frac{1}{9}$. Эндээс $a + b + c + e + f + g \leq \frac{8}{9}$ тул $a + b + c \leq \frac{4}{9}$ эсвэл $e + f + g \leq \frac{4}{9}$ болно. $a + b + c \leq \frac{4}{9}$ үед зөрчилд хүрэх $e + f + g \leq \frac{4}{9}$ үеийнхтэй тэгш хэмтэйгээр хийгдэх тул бид зөвхөн $a + b + c \leq \frac{4}{9}$ үеийг баталъя.

$a + b + c \leq \frac{4}{9}$ тэнцэтгэл бишээс

$$b \leq \frac{4}{9} - a \leq \frac{4}{9} - \frac{1}{5} = \frac{11}{45}.$$

Мөн $b \geq \frac{1}{5}(1 - a)$, $c \geq \frac{1}{5}(1 - a - b)$ гэдгээс

$$a + b + c \geq a + \frac{1}{5}(1 - a) + \frac{1}{5}(1 - a - b) = \frac{3}{5}a + \frac{2}{5} - \frac{1}{5}b \geq \frac{3}{25} + \frac{2}{5} - \frac{11}{225} > \frac{4}{9}$$

болж зөрчилд хүрнэ.

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- 7 цэгтэй байгуулалт хийсэн бол 3 оноо.
- 8 цэгийг байгуулж чадахгүйг харуулсан бол 4 оноо.
- **Жижиг алдаа:** -1 оноо **Том алдаа:** -2 оноо

Бодлого 4. $P(x)$ нь сондгой зэргийн, бүхэл коэффициенттой олон гишүүнт байг. Хэрэв $x \neq y$ байх бүхэл тоон x, y төгсгөлгүй олон хосуудын хувьд $xP(x) = yP(y)$ нөхцөл биелдэг бол $P(x)$ олон гишүүнт бүхэл тоон язгууртай болохыг батал.

Бодолт: Хэрэв $x = 0, y \neq 0$ нь $xP(x) = yP(y)$ нөхцөлийг хангах ялгаатай бүхэл тоон хос олддог бол $P(y) = 0$ болох тул баталгаа дуусна. Бусад тохиолдолд, бодлогын нөхцөлийг хангах 0-ээс ялгаатай бүхэл тоон хос (x, y) төгсгөлгүй олон олдоно. $n \geq 1$ ба $a_i \in \mathbb{Z}, a_{2n-1} \neq 0$ байх

$$P(x) = a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_0$$

олон гишүүнт авч үзье. Тэгвэл

$$\begin{aligned} xP(x) - yP(y) &= a_{2n-1}(x^{2n} - y^{2n}) + a_{2n-2}(x^{2n-1} - y^{2n-1}) + \dots + a_0(x - y) \\ &= (x - y)(a_{2n-1}(x^{2n-1} + x^{2n-2}y + \dots + y^{2n-1}) \\ &\quad + a_{2n-2}(x^{2n-2} + x^{2n-3}y + \dots + y^{2n-2}) + \dots + a_0) \end{aligned}$$

болно. Иймд $x \neq y$ тул

$$a_{2n-1}(x + y)(x^{2n-2} + x^{2n-4}y^2 + \dots + y^{2n-2}) = -(a_{2n-2}(x^{2n-2} + x^{2n-3}y + \dots + y^{2n-2}) + \dots + a_0)$$

болно. Одоо $a_{2n-1} \neq 0$ ба $a_{2n-1} \in \mathbb{Z}$ тул $|a_{2n-1}| \geq 1$ байна. Түүнчлэн бүх $k, \ell \geq 0$ -ийн хувьд $x^{2k}y^{2\ell} \geq 0$ тул

$$|x^{2n-2} + x^{2n-4}y^2 + \dots + y^{2n-2}| \geq |x^{2n-2}|$$

биелнэ. $|x| \geq |y|$ гэд. $i \geq j$ үед $|x^i| \geq |x^j|$ болохыг анхаарвал

$$\begin{aligned} |x + y||x^{2n-2}| &\leq |a_{2n-1}(x + y)(x^{2n-2} + x^{2n-4}y^2 + \dots + y^{2n-2})| \\ &= |a_{2n-2}(x^{2n-2} + x^{2n-3}y + \dots + y^{2n-2}) + \dots + a_0| \\ &\leq |a_{2n-2}(2n-1)x^{2n-2}| + |a_{2n-3}(2n-2)x^{2n-2}| + \dots + |a_0(1)x^{2n-2}| \\ &\leq ((2n-1)|a_{2n-2}| + (2n-2)|a_{2n-3}| + \dots + |a_0|)|x^{2n-2}| \end{aligned}$$

гарна. Гэтэл $x \neq 0$ тул хоёр талыг $|x^{2n-2}|$ -д хуваавал

$$|x + y| \leq (2n-1)|a_{2n-2}| + (2n-2)|a_{2n-3}| + \dots + |a_0|$$

гэж зааглагдана. Иймд төгсгөлгүй олонлогийн Дирихлейн зарчмаар $x + y = c$ ба $xP(x) = yP(y)$ нөхцөлийг хангах (x, y) хос төгсгөлгүй олон оршин байх тийм бүхэл тоо c олдоно. Өөрөөр хэлбэл, $xP(x) = (c - x)P(c - x)$ тэнцэтгэл төгсгөлгүй олон x -ийн хувьд биелнэ. $P(x)$ нь олон гишүүнт энэ нь адилтгал биелэх буюу $x \in \mathbb{R}$ бүрийн хувьд тэнцэтгэл байна. Хэрэв $c \neq 0$ бол $x = 0$ -ийг орлуулбал $cP(c) = 0 \implies P(c) = 0$ болж баталгаа дуусна. Хэрэв $c = 0$ бол $xP(x) = -xP(-x) \implies P(x) = -P(-x)$ болох бөгөөд 0 нь $P(x)$ -ийн язгуур болно.

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- (1) $x = 0, y \neq 0$ эсвэл $c = 0$ тохиолдолд $P(y) = 0$ эсвэл 0 нь P -ийн язгуур болохыг амархан шалгах санааг гаргахад 1 оноо.
- (2) $xP(x) - yP(y)$ илэрхийллийг $(x - y)$ болон бусад олон гишүүнтийн үржвэрт зөв зааглаж, $a_{2n-1}(x + y)(\dots)$ хэлбэрээр тэнцэтгэлийг шилжүүлэн бичихэд 1 оноо.
- (3) Гурвалжны тэнцэтгэл биш ба $|x^{2n-2} + x^{2n-4}y^2 + \dots + y^{2n-2}| \geq |x^{2n-2}|$ үнэлгээг ашиглан $|x + y| \leq (2n - 1)|a_{2n-2}| + \dots + |a_0|$ гэсэн дээд заагийг бүрэн баталж зааглахад 2 оноо.
- (4) Төгсгөлгүй олонлогийн Дирихлейн зарчмаар $x + y = c$ байх тийм бүхэл тоо c олдож, $xP(x) = (c - x)P(c - x)$ адилтгал гарна гэдгийг үндэслэлтэй харуулахад 2 оноо.
- (5) $c \neq 0$ ба $c = 0$ тохиолдлуудыг тусад нь авч үзэн $P(x)$ олон гишүүнт заавал язгууртай болохыг баталж дуусгахад 1 оноо.
- (6) Алгебрын хувиргалт болон зэргийн задрал дээр томоохон алдаа гаргаж үнэлгээ буруу болсон бол -1 оноо хасна.