Бага англиин багш

Бодлого бүр 7 оноо | Бодох хугацаа:210 минут

Бодлого 1. $p^n + 144 = k^2$ тэгшитгэлийг хангах бүх p анхны тоо ба n, k натурал тоон (p, n, k) гуравтыг ол.

Бодолт: $p^n + 144 = k^2 \implies p^n = (k-12)(k+12)$. p анхны тоо тул $a < b$ ба $a + b = n$ байх $a, b \geq 0$ бүхэл тоонуудын хувьд $k - 12 = p^a, k + 12 = p^b$ байна. Эндээс

$$p^b - p^a = 24 \implies p^a(p^{b-a} - 1) = 24.$$

$a = 0$ үед $p^b - 1 = 24 \implies p^b = 25 \implies p = 5, b = 2$. Эндээс $n = 0 + 2 = 2$ ба $k - 12 = 1 \implies k = 13$. Шийд: $(5, 2, 13)$.
$a > 0$ үед p^a нь 24-ийн хуваагч болох тул анхны тоо $p \in \{2, 3\}$ байна.

- $p = 2$ бол $2^a(2^{b-a} - 1) = 8 \cdot 3 \implies a = 3, 2^{b-3} - 1 = 3 \implies b = 5$. Эндээс $n = 8, k = 20$. Шийд: $(2, 8, 20)$.
- $p = 3$ бол $3^a(3^{b-a} - 1) = 3 \cdot 8 \implies a = 1, 3^{b-1} - 1 = 8 \implies b = 3$. Эндээс $n = 4, k = 15$. Шийд: $(3, 4, 15)$.

Хариу: $(5, 2, 13), (2, 8, 20), (3, 4, 15)$.

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

(1) Тэгшитгэлийг $(k-12)(k+12) = p^n$ хэлбэрт оруулсан бол 1 оноо.

(2) Ялгаврыг авч $p^a(p^{b-a} - 1) = 24$ тэгшитгэлийг бичсэн бол 2 оноо.

(3) $p \in \{2, 3\}$ гэж дүгнэхэд 1 оноо.

(4) Зөв шийд бүрд 1 оноо.

Бодлого 2. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} < \frac{1}{45}$ тэнцэтгэл бишийг батал.

Бодолт: $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2023}{2024}$ ба $Q = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2024}{2025}$ гэе. Аливаа натурал k-ийн хувьд

$$(2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1 < 4k^2$$

тул $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$ байна. Үүнийг ашиглан гишүүнчлэн жишвэл $P < Q$ болно. Хоёр үржвэрийг хооронд нь үржүүлж хураавал

$$P \cdot Q = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 2024}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2025} = \frac{1}{2025}$$

Иймд $P < Q$ тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг P-д үржүүлбэл:

$$P^2 < P \cdot Q = \frac{1}{2025} = \left(\frac{1}{45}\right)^2 \implies P < \frac{1}{45}$$

болж батлагдана.

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

(1) Өгөгдсөн P үржвэртэй жиших $Q = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2024}{2025}$ (эсвэл үүнтэй төстэй) туслах үржвэрийг зохиоход 2 оноо.

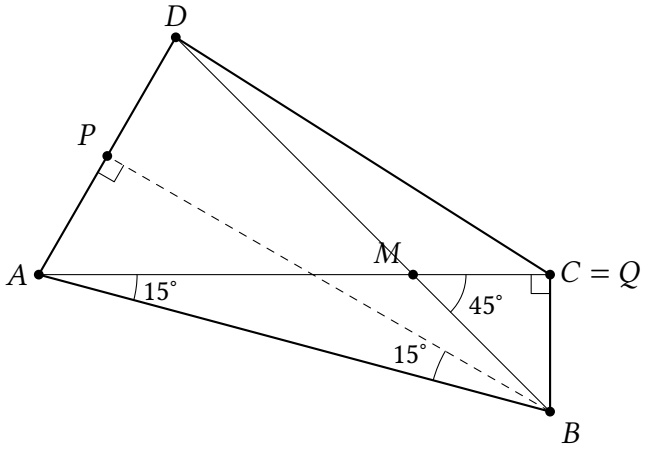
(2) $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$ болохыг харуулж, гишүүнчлэн жиших замаар $P < Q$ болохыг батлахад 2 оноо.

(3) $P \cdot Q$ үржвэрийг зөв тооцоолж, хураах замаар $\frac{1}{2025}$ гаргахад 2 оноо.

(4) $P^2 < P \cdot Q$ чанарыг ашиглан $P < \frac{1}{45}$ төгсгөлийн дүгнэлтийг гаргахад 1 оноо.

Бодлого 3. *$ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд M цэгт огтлолцоно. Хэрэв $AB = BD$, $AD = 10$, $MC = 5$, $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle BAC = 15^\circ$ бол BC талын уртыг ол.*

Бодолт: B-ээс AD, AC-д буулгасан перпендикуляруудын суурийг P, Q гэе. $AB = BD$ тул $AP = \frac{AD}{2}$, $\angle ABP = 15^\circ$. $\angle AMB = 135^\circ$ тул $\angle QMB = 45^\circ$, иймээс $BQ = QM$. $\triangle APB \cong \triangle BQA$ (AB ерөнхий, $\angle ABP = \angle BAQ = 15^\circ$) тул $BQ = AP = \frac{AD}{2} = MC$. Тэгэхээр $MQ = MC$, өөрөөр хэлбэл $Q = C$ ба $BC = BQ = 5$.



Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог (хүрсэн шатлалаар нь) дараах байдлаар өгнө.

(1) BM өндөр татаж, O цэг нь багтсан тойргийн төв болохыг харуулсан, эсвэл өнцгүүдийн тооцоолол хийж 75° ба 45° гэдгийг гаргаж ирсэн бол — 1 оноо

(2) BHN гурвалжныг байгуулж, өнцгүүдийн тооцоо хийн адил хажуут тэгш өнцөгт гурвалжин болохыг харуулсан (гэхдээ өндөр буюу перпендикуляр татаагүй) бол — 2 оноо

(3) $\angle ABC = 75^\circ$ болохыг харуулсан бол — 3 оноо

(4) $\triangle ABM \cong \triangle BAH$ тэнцүү болохыг харуулсан бол — 5 оноо

(5) H ба C цэгүүд давхцахыг харуулж, бодолтыг бүрэн гүйцээж дүгнэсэн бол — 7 оноо

Бодлого 4. *$\{1, 2, \ldots, k\}$ олонлогийг үл огтлолцох хоёр дэд олонлогийн нэгдэлд бичих бүрд аль нэг дэд олонлогоос нь квадратуудын нийлбэр нь нийлбэртээ хуваагддаг хоёр тоог сонгож чаддаг байх хамгийн бага k эерэг бүхэл тоог ол.*

Бодолт: $(a+b) \mid (a^2+b^2)$ нь $(a+b) \mid 2ab$ нөхцөлтэй адил чанартай болно. $\{10, 15, 30\}$ гэсэн

гурван тооны дурын хоёрыг авахад нөхцөл биелнэ ($10+15 \mid 10^2+15^2$, $15+30 \mid 15^2+30^2$, $10+30 \mid 10^2+30^2$). Дирихлейн зарчмаар энэ 3 тоог 2 хэсэгт хуваахад аль нэг хэсэгт нь дор хаяж 2 тоо заавал хамт орох тул $k=30$ үед зөрчил гарахгүй.

$k \le 29$ үед $a<b\le 29$ байх нөхцөл хангадаг хосууд нь

$$(2,6),(3,6),(3,15),(4,12),(4,28),(5,20),(6,12),(6,18),$$
$$(8,24),(9,18),(10,15),(12,20),(12,24),(21,28)$$

байна. Эндээс нэг хэсэгт $\{4,6,9,15,20,21,24\}$ нөгөө хэсэгт үлдсэн бүх тоог оруулахад аль ч хэсгээс нөхцөлийг хангах хоёр тоо олдохгүй.

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

(1) Бодлогын $(a+b) \mid (a^2+b^2)$ нөхцөлийг $(a+b) \mid 2ab$ эсвэл $(a+b) \mid 2b^2$ хэлбэрт зөв шилжүүлж хялбарчилсан бол 1 оноо.

(2) $k \le 30$ үед нөхцөл хангах хосуудыг жагсааж бичвэл 1 оноо

(3) $k=30$ үед $\{10,15,30\}$ гэсэн 3 тоо нь хоорондоо бүгд нөхцөл хангадаг болохыг илрүүлж, тооцооллоор баталсан бол 1 оноо.

(4) Дирихлейн зарчмаар гурвалжин үүсгэсэн 3 тоог 2 хэсэгт салгах боломжгүйг тайлбарлаж, $k=30$ үед үргэлж шийдтэйг баталсан бол 1 оноо.

(5) $k \le 29$ үед үүсэх хосууд ямар нэг цикл үүсгэхгүй (эсвэл хоёр хуваагддаг граф) болохыг үндэслэлтэй харуулсан бол 1 оноо.

(6) $k \le 29$ үед зөрчилгүйгээр салгаж болох A, B хоёр олонлогийг (эсвэл үүнтэй адил жишээ) амжилттай байгуулж шалгасан бол 1 оноо.

(7) Эцсийн хариу $k=30$ гэдгийг логик алдаагүй, бүрэн дүгнэж дуусгахад 1 оноо. (Зөвхөн ”30” гэсэн хариу бичвэл оноо өгөхгүй).