

Бодлого 1. Эерэг бүхэл n тооны хувьд $3^n - 2^n$ тоо нь n -д хуваагддаг бол $n = 1$ гэж батал.

Бодолт: Бодлогын нөхцөлийг хангах $n > 1$ байдаг гэж эсрэгээс нь үзье. n -ийн хамгийн бага анхны хуваагч p байг. $p \mid n$ болон $n \mid (3^n - 2^n)$ нөхцөлүүдээс $3^n \equiv 2^n \pmod{p}$ байна. Хэрэв $p = 2$ эсвэл $p = 3$ байвал $3^n - 2^n$ нь 2 болон 3-ын алинд ч хуваагдахгүй тул $p \geq 5$ байх шаардлагатай. p модулийн хувьд 2-ын урвууг 2^{-1} гэж тэмдэглээд, $a \equiv 3 \cdot 2^{-1} \pmod{p}$ гэж орлуулбал $(3 \cdot 2^{-1})^n \equiv 1 \pmod{p}$ буюу $a^n \equiv 1 \pmod{p}$ болно. Одоо p модулийн хувьд a -ийн эрэмбийг d гэе ($d = \text{ord}_p(a)$). Эрэмбийн чанар ёсоор $a^n \equiv 1 \pmod{p}$ тул $d \mid n$ байна. Фермагийн бага теоремоор $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ байх тул $d \mid (p-1)$ байна. Эдгээрээс d нь n болон $p-1$ тоонуудын ерөнхий хуваагч болох ба $d \mid \text{gcd}(n, p-1)$ нөхцөл биелнэ. Бид анх p -г n -ийн хамгийн бага анхны хуваагч гэж сонгосон тул $p-1$ -ээс бага ямар ч анхны тоо n -ийг хуваахгүй. Иймээс n болон $p-1$ нь харилцан анхны буюу $\text{gcd}(n, p-1) = 1$ болно. Эндээс $d = 1$ гарах ба $a^1 \equiv 1 \pmod{p}$ байна. Үүнийг буцааж задлавал $3 \cdot 2^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$ буюу $3 \equiv 2 \pmod{p}$ болох бөгөөд энэ нь $p \mid 1$ гэсэн зөрчилд хүргэнэ. Тиймээс зөвхөн $n = 1$ байх шаардлагатай нь батлагдаж байна.

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- (1) Эсрэгээс нь таалж, $n > 1$ үед n -ийн хамгийн бага анхны хуваагч p -г авах санаа гаргахад 1 оноо.
- (2) $p \mid (3^n - 2^n)$ буюу $3^n \equiv 2^n \pmod{p}$ гэж гаргаж, $p \geq 5$ болохыг харуулахад 1 оноо.
- (3) Эрэмбэ $d = \text{ord}_p(a)$ оруулж ирэн, $d \mid n$ болон Фермагийн бага теоремоор $d \mid (p-1)$ болохыг харуулахад 2 оноо.
- (4) p нь n -ийн хамгийн бага анхны хуваагч тул $\text{gcd}(n, p-1) = 1$ болохыг үндэслэлтэй тайлбарлахад 1 оноо.
- (5) $(n, p-1) = 1$ -ээс $d = 1$ гарч, $3 \equiv 2 \pmod{p}$ буюу $p \mid 1$ гэсэн зөрчилд хүрч баталгааг бүрэн дуусгахад 1 оноо.
- (6) Шууд зөв хариу $n = 1$ гэж бичсэн бол оноо өгөхгүй. (Жижиг тооны алдаа эсвэл дутуу тайлбарт -1 оноо)

Бодлого 2. $x_1, x_2, \dots, x_n$ нь дурын бодит тоонууд байг. Дараах тэнцэл бишийг батал:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\dots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Бодолт: $S_n = 1 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ гэе. ($S_0 = 1$)

Тэнцэтгэл бишийг дараах хэлбэрт шилжүүлэн бичвэл:

$$\frac{x_1}{S_1} + \frac{x_2}{S_2} + \dots + \frac{x_n}{S_n} < \sqrt{n}$$

болохыг батлах шаардлагатай.

Чебышевгийн тэнцэтгэл бишийг ашиглан

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{S_i}\right)^2 \leq n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{S_i^2}\right)$$

болно. Иймд $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{S_i^2} < 1$ болохыг батлахад хангалттай. $x_i^2 = S_i - S_{i-1}$ байна.

Одоо $\sum_{i=1}^n \frac{S_i - S_{i-1}}{S_i^2} < 1$ тэнцэтгэл бишийг баталъя. S_n нь монотон үл буурах дараалал тул $S_i^2 \geq S_i \cdot S_{i-1}$ байна.

$$\sum_{i=1}^n \frac{S_i - S_{i-1}}{S_i^2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{S_i - S_{i-1}}{S_i \cdot S_{i-1}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{S_{i-1}} - \frac{1}{S_i}\right) = \frac{1}{S_0} - \frac{1}{S_n} = 1 - \frac{1}{S_n} < 1$$

Иймд уг тэнцэл биш батлагдлаа.

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- (1) $S_n = 1 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ тэмдэглэгээг ашиглаж, бодох шаардлагатай тэнцэтгэл бишийг $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{S_i} < \sqrt{n}$ хэлбэрт зөв шилжүүлэн томъёолоход 1 оноо.
- (2) Коши-Буняковский (эсвэл Чебышев/Дундаж)-ийн тэнцэтгэл бишийг ашиглан $\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{S_i}\right)^2 \leq n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{S_i^2}\right)$ үнэлгээг гаргаж, батлах зүйлийг $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{S_i^2} < 1$ болгоход 2 оноо.
- (3) $x_i^2 = S_i - S_{i-1}$ чанарыг ашиглан гишүүн тус бүрийг $S_i - S_{i-1}$ хэлбэрт оруулахад 1 оноо.
- (4) $S_i^2 \geq S_i \cdot S_{i-1}$ үнэлгээг ашиглан $\frac{S_i - S_{i-1}}{S_i^2} \leq \frac{1}{S_{i-1}} - \frac{1}{S_i}$ гэсэн хэлбэрт оруулахад 2 оноо.
- (5) $S_0 = 1$ гэдгээс $\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{S_{i-1}} - \frac{1}{S_i}\right) = 1 - \frac{1}{S_n} < 1$ болохыг харуулж, баталгааг бүрэн дуусгахад 1 оноо.
- (6) Тэнцэтгэл бишийг батлахдаа гаргасан жижиг алдаа бүрд -1 оноо.
- (7) Шууд баталгаагүйгээр "үнэн" гэж бичсэн бол оноо өгөхгүй.

Бодлого 3. ABC гурвалжны AC тал дээр D цэгийг авав. B оройг дайрсан, AC талыг D цэгт шүргэх тойрог AB, BC шулуунуудыг харгалзан E, F цэгүүдэд огтлов. AT нь DF -тэй параллель, CT нь DE -тэй параллель байхаар T цэгийг авав. DT шулуун нь DEA гурвалжныг багтаасан тойргийг шүргэнэ гэж батал.

Бодолт: E -г F -тэй холбоё. $EF \cap AT = K$ гэе. Мөн адил $TC \cap EF = M$ гэе. $\angle FED = \alpha$ гэвэл ω тойрог AC -г шүргэх учир $\angle FDC = \alpha$ байна. $FD \parallel AT \implies \angle TAD = \alpha$.

$\angle TAD = \alpha$ ба $\angle FED = \alpha \implies KEAD$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Энэхүү багтаасан тойргийг нь ω_1 гэе.

EAD гурвалжныг багтаасан тойрог TD -г шүргэнэ гэж батлах учир ω_1 тойргийг шүргэнэ гэж батлахад хангалттай. K -г D -тэй холбоё. Мөн адил $\angle EFD = \gamma$ гэвэл шүргэгч учир $\angle ADE = \gamma$ байна. $TC \parallel ED$ учир $\angle MCD = \gamma$.

$\angle MCD = \gamma$ ба $\angle MFD = \gamma \implies MFCD$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Түүнийг багтаасан тойргийг ω_2 гэе. ω_2 тойргийн хувьд FC нумд тулсан өнцгүүд тэнцүү тул

$$\angle FDC = \alpha \implies \angle FMC = \alpha \implies \angle TMK = \alpha.$$

$\angle AED = \beta$ гэвэл $EDFB$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах учир гадаад өнцгийн чанараар $\angle DFB = \beta \implies \angle DFC = 180^\circ - \beta$. ω_2 тойргийн хувьд DC нумд тулсан

$$\angle DFC = 180^\circ - \beta \implies \angle DMC = 180^\circ - \beta \implies \angle TMD = \beta.$$

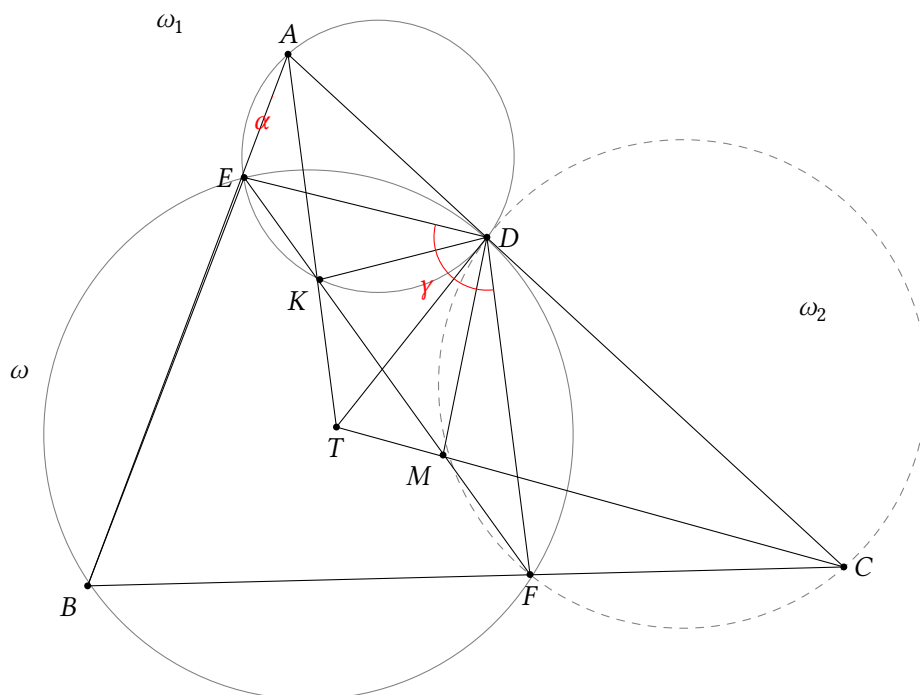
ω_1 тойргийн хувьд AD нумд тулсан

$$\angle AED = \beta \implies \angle AKD = \beta \implies \angle TKD = 180^\circ - \beta.$$

$\angle TMD = \beta$ ба $\angle TKD = 180^\circ - \beta \implies KDMT$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана.

Иймд KT нумд тулсан өнцгүүд тэнцүү тул $\angle KMT = \alpha \implies \angle KDT = \alpha$.

Эцэст нь, $\angle KDT = \alpha$ ба $\angle KED = \alpha$ байгаа тул ω_1 тойргийн хувьд DT нь шүргэгч болно. Өөрөөр хэлбэл, DT шулуун нь DEA гурвалжныг багтаасан тойргийг шүргэх нь бүрэн батлагдлаа.



Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- (1) $CFND$, $AEND$ дөрвөн өнцөгтүүдийг тойрогт багтана гэж харуулахад 1 оноо
- (2) $DNTM$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана гэж харуулбал бол 3 оноо
- (3) $\angle TDE = \angle DAE$ гэж харуулахад 3 оноо
- (4) Ижил чанартай үр дүнд ижил оноо өгнө.

Бодлого 4. $\{1, 2, \dots, k\}$ олонлогийг үл огтлолцох хоёр дэд олонлогийн нэгдэлд бичих бүрд аль нэг дэд олонлогоос нь үржвэр нь нийлбэртээ хуваагддаг хоёр тоог сонгож чаддаг байх хамгийн бага k эерэг бүхэл тоог ол.

Бодолт: $(a, b) = d$ гэвэл $a + b \mid ab \iff (x + y) \mid d$ болно. Иймд $(x, y) = 1$ байх $x < y$ ба $k \geq 1$ тоонуудын хувьд $a = k \cdot x(x + y)$, $b = k \cdot y(x + y)$ хэлбэртэй байх ба $b \leq 39$ байх бүх хосуудыг олбол $(x, y) = (1, 2) \implies a = 3k, b = 6k$ ($k = 1 \dots 6$):

$$(3, 6), (6, 12), (9, 18), (12, 24), (15, 30), (18, 36)$$

$$(x, y) = (1, 3) \implies a = 4k, b = 12k \ (k = 1 \dots 3): (4, 12), (8, 24), (12, 36)$$

$$(x, y) = (2, 3) \implies a = 10k, b = 15k \ (k = 1, 2): (10, 15), (20, 30)$$

$$(x, y) = (1, 4) \implies a = 5k, b = 20k \ (k = 1): (5, 20)$$

$$(x, y) = (1, 5) \implies a = 6k, b = 30k \ (k = 1): (6, 30)$$

$$(x, y) = (2, 5) \implies a = 14k, b = 35k \ (k = 1): (14, 35)$$

$$(x, y) = (3, 4) \implies a = 21k, b = 28k \ (k = 1): (21, 28) \text{ нийт 15 хос олдоно.}$$

$k \leq 39$ үед

A хэсэгт $\{4, 6, 9, 14, 15, 20, 21, 24, 36\}$ тоонуудыг

B хэсэгт $\{3, 5, 8, 10, 12, 18, 28, 30, 35\}$ тоонуудыг оруулах ба үлдсэн тоонуудыг A, B хэсгүүдэд дураар хуваарилахад аль ч хэсгээс нөхцөлийг хангах тоонууд олдохгүй.

$k = 40$ болоход шинээр $(10, 40), (24, 40)$ хосууд нэмэгдэнэ. Хоёр хэсэгт хувааж болдог байг. Тэгвэл

$$(10, 40), (40, 24), (24, 12), (12, 6), (6, 30), (30, 15), (15, 10)$$

хосуудыг авч үзье. Хэрэв $10 \in A$ гэж үзвэл

$$40 \in B \implies 24 \in A \implies 12 \in B \implies 6 \in A \implies 30 \in B \implies 15 \in A$$

болно. Гэтэл $10 \in A$ ба $15 \in A$ болж зөрчил үүснэ. Иймд бодлогын нөхцөлийг хангах хамгийн бага k тооны утга 40 байна.

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- (1) $(a, b) = d$ гэж тэмдэглэн, $a + b \mid ab \iff (x + y) \mid d$ болохыг харуулбал 1 оноо
- (2) $a = k \cdot x(x + y), b = k \cdot y(x + y) \ (x < y, (x, y) = 1)$ ерөнхий хэлбэрийг гаргахад 1 оноо.
- (3) $b \leq 39$ байх бүх боломжит (x, y, k) тохиолдлуудыг бүрэн шалгаж, яг 15 хос олдохыг зөв жагсаан бичихэд 1 оноо.
- (4) $k \leq 39$ үед 15 хосыг 2 хэсэгт салгаж чадах A, B олонлог байгуулан, зөрчилгүй хуваалт олдож байгааг харуулахад 1 оноо.
- (5) $k = 40$ үед 7 оройтой сондгой цикл $(10 - 40 - 24 - 12 - 6 - 30 - 15 - 10)$ байгуулж, 2 хэсэгт заглах боломжгүйг (зөрчил үүсэхийг) батлахад 2 оноо.
- (6) Хамгийн бага $k = 40$ болохыг логик дараалалтайгаар эцсийн дүгнэлтээр бүрэн баталж дуусгахад 1 оноо.
- (7) Шууд баталгаагүйгээр "40" гэж бичсэн тохиолдолд оноо өгөхгүй. (Жижиг тооцооллын эсвэл жагсаалтын алдаа гаргасан бол -1 оноо).