

VII-VIII анги

Бодлого бүр 7 оноо | Бодох хугацаа: 150 минут

Бодлого 1. $x^2 + y^2 - x - 14.5y - xy$ илэрхийллийн утга хамгийн бага байхаар x, y бүхэл тоонуудыг ол.

Бодолт: Өгөгдсөн илэрхийлэл маань дараах хэлбэртэй болно

$$E(x, y) = \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-10)^2 - 75.25$$

Илэрхийллийн утга хамгийн бага байхын тулд квадрат зэрэгтэй гишүүд болох $\left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2$ болон $\frac{3}{4}(y-10)^2$ нь хамгийн бага (0-тэй аль болох ойр) байх ёстой. y бүхэл тоо тул $\frac{3}{4}(y-10)^2$ гишүүн $y = 10$ үед хамгийн бага буюу 0 утгатай байна. $y = 10$ үед эхний гишүүн $\left(x - \frac{10+1}{2}\right)^2 = (x-5.5)^2$ болно. x нь бүхэл тоо тул $(x-5.5)^2$ гишүүний утга $x = 5$ эсвэл $x = 6$ байх үед хамгийн бага буюу $(0.5)^2 = 0.25$ гарна. Эдгээр утгуудыг орлуулж илэрхийллийн утгыг шалгавал:

$$E(5, 10) = (5 - 5.5)^2 + 0 - 75.25 = 0.25 - 75.25 = -75$$

$$E(6, 10) = (6 - 5.5)^2 + 0 - 75.25 = 0.25 - 75.25 = -75$$

Илэрхийллийн утгыг хамгийн бага (-75) байлгадаг бүхэл тоо x, y -ийн хосууд нь $(5, 10)$ болон $(6, 10)$ байна.

Хариу: -75

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- (1) Илэрхийллийг x -ээс хамаарсан бүтэн квадрат болгон $\left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 + \dots$ хэлбэрт оруулахад 2 оноо.
- (2) Үлдсэн гишүүдийг y -ээс хамаарсан бүтэн квадрат болгон хувиргаж $\frac{3}{4}(y-10)^2 - 75.25$ (эсвэл үүнтэй тэнцүү) хэлбэрт бүрэн шилжүүлэхэд 2 оноо.
- (3) y бүхэл тоо гэдгийг ашиглан $\frac{3}{4}(y-10)^2$ гишүүнийг хамгийн бага байлгах утга нь $y = 10$ болохыг тогтооход 1 оноо.
- (4) $y = 10$ үед $(x - 5.5)^2$ гишүүний утгыг хамгийн бага байлгах x -ийн бүхэл утгууд нь $x = 5$ болон $x = 6$ болохыг харуулахад 1 оноо.
- (5) $(5, 10)$ болон $(6, 10)$ гэсэн хоёр шийдийг бүрэн олж хариуг гаргахад 1 оноо (зөвхөн нэг шийдийг олсон бол энэ оноог өгөхгүй).
- (6) Шууд зөв хариу бичихэд оноо өгөхгүй.
- (7) Жижиг тооцооллын алдаа бүрд -1 оноо.

Бодлого 2. $N + S(N)^2 = 1089$ тэгшитгэлийг хангах бүх эерэг бүхэл N тоог ол. (энд $S(N)$ нь N тооны цифрүүдийн нийлбэр)

Бодолт: $N \leq 1089$ тул $S(N) \leq 28$. $N \equiv S(N) \pmod{9}$ чанараар $S(N) + S(N)^2 \equiv 1089 \equiv 0 \pmod{9}$ байх тул $S(N) \equiv 0 \pmod{9}$ эсвэл $S(N) \equiv 8 \pmod{9}$ байна. Иймд $S(N) \in \{0, 8, 9, 17, 18, 26, 27\}$. Тохiolдол бүрд $N = 1089 - S(N)^2$ ашиглан N -ийг олж шалгавал

$$S(N) = 18 \implies N = 1089 - 324 = 765 \implies S(765) = 18,$$

$$S(N) = 8 \implies N = 1089 - 64 = 1025 \implies S(1025) = 8,$$

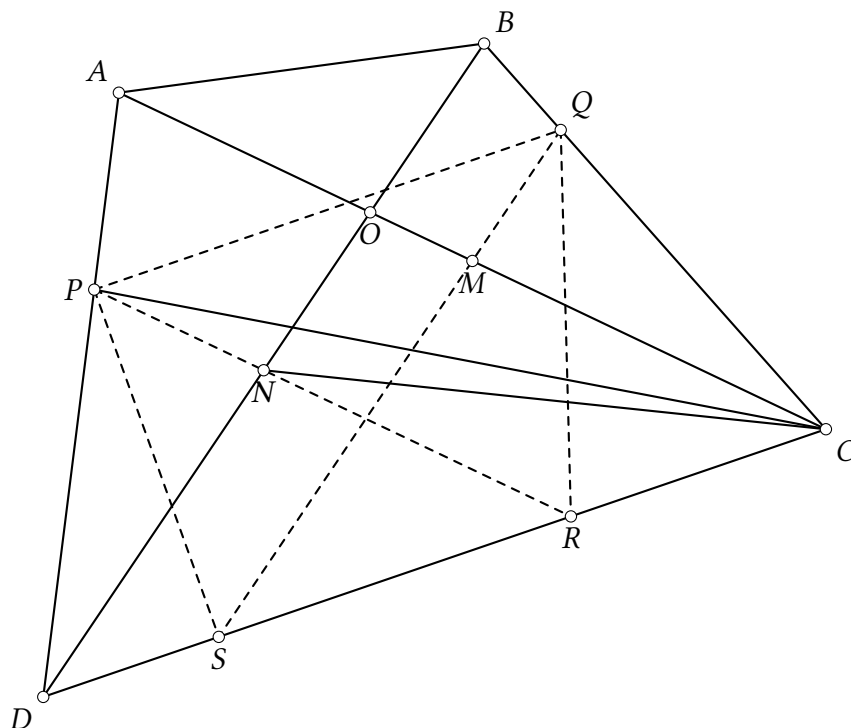
$S(N) = 9 \implies N = 1089 - 81 = 1008 \implies S(1008) = 9$ гэсэн хариунууд нөхцөлийг хангана. (Бусад $S(N)$ -ийн утгуудад зөрчил үүснэ). Хариу: $N \in \{765, 1008, 1025\}$

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- (1) $N \leq 1089$ тул $S(N) \leq 28$ байх үнэлгээг хийж, $N \equiv S(N) \pmod{9}$ чанарыг ашиглан $S(N) + S(N)^2 \equiv 0 \pmod{9}$ конгруэнцийг зохиоход 2 оноо.
- (2) $S(N) \equiv 0 \pmod{9}$ болон $S(N) \equiv 8 \pmod{9}$ байх боломжит үлдэгдлүүдийг олж, $S(N) \in \{8, 9, 17, 18, 26, 27\}$ боломжуудыг бүрэн жагсаахад 2 оноо.
- (3) $S(N) = 8, 9, 18$ үед $N = 1025, 1008, 765$ гэсэн 3 зөв шийдийг тус бүр олж шалгахад 2 оноо.
- (4) Бусад боломжит утгуудыг (17, 26, 27) шалгаж, зөрчил үүсэхийг харуулан шийдгүй болохыг үндэслэлтэй тайлбарлахад 1 оноо.
- (5) Шууд хариу бичсэн тохиолдолд оноо өгөхгүй. (Жижиг тооны алдаа эсвэл зарим шийдийг дутуу шалгасан бол -1 оноо).

Бодлого 3. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн диагональ бүрийн дундаж цэгийг дайруулан нөгөө диагональтай параллель шулуун татав. Эдгээр шулуунуудын $ABCD$ -ийн талуудтай огтлолцох дөрвөн цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийн нэг тал нь $ABCD$ -ийн аль нэг талтай параллель болохыг батал.

Бодолт: $\triangle DPC$ ба $\triangle DQC$ гурвалжнууд нь ерөнхий CD суурьтай тул тэдгээрийн талбайнууд тэнцүү ($S_{DPC} = S_{DQC}$) байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $PQ \parallel CD$ байх явдал юм.



$$S_{DPC} = \frac{DP}{AD} \cdot S_{ACD} = \frac{DN}{DO} \cdot S_{ACD} = \frac{BD}{2 \cdot DO} \cdot \frac{AC}{OC} \cdot S_{COD};$$

Үүнтэй адилаар

$$S_{CQD} = \frac{CQ}{CB} \cdot S_{BCD} = \frac{CM}{CO} \cdot S_{BCD} = \frac{AC}{2 \cdot CO} \cdot \frac{BD}{OD} \cdot S_{COD}$$

болж батлагдав.

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- S_{DPC} гурвалжны талбайг талуудын харьцаагаар задалж, S_{COD} -оор илэрхийлж гаргасан бол — 3 оноо
- S_{CQD} гурвалжны талбайг мөн адил талуудын харьцаагаар задалж, S_{COD} -оор илэрхийлсэн бол — 3 оноо
- Дээрх хоёр илэрхийлэл тэнцүү болохыг харуулж, $PQ \parallel CD$ дүгнэлтэд хүрсэн бол — 1 оноо
- Нэг тал дээр орших хоёр нь цэг нь оршихыг харуулсан бодолтыг тооцохгүй.

Бодлого 4. 2026-аас хэтрэхгүй эерэг бүхэл тоонуудаас хамгийн цөөндөө хэдэн тоо сонгож авахад сонгосон тоонууд дундаас үржвэр нь 105-д хуваагдах хоёр тоо үргэлж олдох вэ?

Бодолт: 1-ээс 2026 хүртэлх тоонуудыг 3, 5, 7-д хуваагдах шинжээр нь Веннийн диаграмм ашиглан ангилъя. Хоёр тооны үржвэр 105-д ($3 \times 5 \times 7$) хуваагдахын тулд уг хоёр тоо нийлээд эдгээр гурван анхны хуваагчийг бүгдийг нь агуулсан байх ёстой буюу аль нэг тоо нь ядаж хоёр анхны хуваагчид зэрэг хуваагддаг байх шаардлагатай.

Иймд 3, 5, 7-ийн алинд нь ч хуваагдахгүй тоонууд ($S_0 = 926$), зөвхөн 3-т хуваагддаг ($S_3 = 463$), зөвхөн 5-д хуваагддаг ($S_5 = 232$), мөн зөвхөн 7-д хуваагддаг ($S_7 = 155$) тоонуудыг цуглуулж, нийт $926 + 463 + 232 + 155 = 1776$ ширхэг тоо сонгоход эдгээр дундаас үржвэр нь 105-д хуваагдах ямар ч хос тоо олдохгүй.

Харин 1777 тоо сонгох үед 3, 5, 7-ийн ядаж хоёрт нь зэрэг хуваагддаг тоо гарцаагүй орж ирэхээс гадна, үлдсэн гурав дахь хуваагчийг агуулсан тоо мөн адил олдоно. Үүнийг хамгийн цөөн хуваагддаг 7-ийн жишээгээр баталж үзье: 1-ээс 2026 дотор 7-д хуваагддаггүй нийт $2026 - \lfloor 2026/7 \rfloor = 2026 - 289 = 1737$ тоо бий. Тэгвэл бидний сонгосон 1777 тоо дотор 7-д хуваагддаг тоо дор хаяж $1777 - 1737 = 40$ ширхэг байх нь батлагдана (3 болон 5-д хуваагдах тоо үүнээс ч олон олдоно). Ингэснээр дээрх 1777 тоо дотор шаардлагатай хуваагчдыг гүйцээх тоонууд заавал орших бөгөөд үржвэр нь 105-д хуваагдах хоёр тоо үргэлж олдох тул хамгийн багадаа 1777 тоо сонгох шаардлагатай.

Дүгнэх аргачлал: Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- (1) 105-ыг харилцан анхны үржигдэхүүнд задалж ($105 = 3 \times 5 \times 7$), тоонуудыг 3, 5, 7-д хуваагдах байдлаар ангилах (Веннийн диаграмм эсвэл олонлогийн огтлолцол) санааг гаргахад 1 оноо.
- (2) 3, 5, 7 болон тэдгээрийн үржвэрүүдэд хуваагддаг тоонуудын тоог алдаагүй, бүрэн тооцоолж гаргахад 1 оноо.
- (3) Хоёр тооны үржвэр 105-д хуваагдахгүй байх хамгийн олон элементтэй олонлогийг бүрдүүлэх логик нөхцөлийг гаргаж, алинд нь ч хуваагдахгүй (S_0) болон зөвхөн нэгэнд нь хуваагддаг (S_3, S_5, S_7) тоонуудыг авах ёстойг тогтооход 2 оноо.
- (4) Дээрх сонголтоор хамгийн ихдээ $926 + 463 + 232 + 155 = 1776$ ширхэг тоог "аюулгүй" сонгож болохыг тооцоолж харуулахад 1 оноо.
- (5) 1777 дахь тоог нэмж авахад 3, 5, 7-ийн ядаж хоёрт нь хуваагдах тоо гарцаагүй орж ирэх ба түүнтэй үржигдэж 105-ыг гүйцээх тоо (жишээ нь, 7-д хуваагддаг тоо дор хаяж 40 байна гэх мэт) заавал олдохыг Дирихлейн зарчмаар бүрэн баталж дуусгахад 2 оноо.
- (6) Ямар ч тайлбар, бодолтгүйгээр шууд "1777" гэсэн хариу бичсэн бол оноо өгөхгүй.
- (7) Огтлолцлын элементийн тоо эсвэл эцсийн нийлбэр дээр жижиг тооцооллын алдаа гаргасан бол нийт онооноос -1 оноо хасна.