

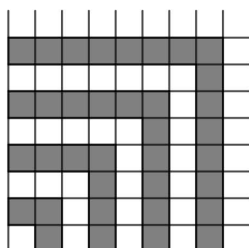
Бүлэг 1

Бодолтууд

VI анги

Бодлого бүр 7 оноо | Бодох хугацаа: 140 минут

Бодлого 1. 50×50 хүснэгтийн зарим нүдийг хар өнгөөр дараах байдлаар будав. Нийт хар нүдний тоо, нийт цагаан нүдний тооноос хэдээр их вэ?



Бодолт: Бат самбарт $10, 11, \dots, 99$ гэсэн бүх хоёр оронтой тоог бичжээ. Ану тэдгээрээс хоёр тоо сонгон, залган бичиж дөрвөн оронтой тоо үүсгэсэн. Үүссэн тоо нь үлдсэн 88 тооны нийлбэртэй тэнцүү бол сонгосон хоёр тоог олж.

Сонгосон тоонуудыг залгах дарааллаар нь a, b гэе. Бүх хоёр оронтой тооны нийлбэр:

$$10 + 11 + \dots + 99 = \frac{(10 + 99) \times 90}{2} = 4905.$$

a -гийн ард b -г залган бичихэд $100a + b$ болно. Иймээс

$$100a + b = 4905 - a - b \implies 101a + 2b = 4905.$$

$10 \leq b \leq 99$ учраас $20 \leq 2b \leq 198$. Тэгвэл

$$4707 \leq 101a \leq 4885.$$

Энэ завсарт 101-ийн үржвэр болох $4747 = 101 \times 47$ ба $4848 = 101 \times 48$ л байна. Гэвч $101a + 2b$ сондгой тул a сондгой байх ёстой. Иймээс $a = 47$. Одоо

$$2b = 4905 - 101 \times 47 = 158 \implies b = 79.$$

Шалгалт: $4905 - 47 - 79 = 4779$, мөн 47 ба 79 -ийг залгавал 4779 болно. 47 ба 79

Бодлого 2. Цифрүүдийн нийлбэр нь 7-д хуваагддаггүй натурал тоог “сайн” тоо гэе. Тэгвэл хамгийн олондоо хэдэн дэс дараалсан “сайн” тоо олдох вэ?

Бодолт: Туузан цаасны 8 нүдэнд эхэндээ 0 байжээ. Дөрвөн дараалсан нүд сонгон, тэдгээрийн тоог тус бүр 1-ээр нэмэх үйлдлийг олон удаа хийсэн. Зурагт байгаа ?-ийн оронд ямар тоо байх вэ?

...	30	42	...	...	36	?	14
1	2	3	4	5	6	7	8

Дөрвөн дараалсан нүдийг сонгох 5 боломж бий: (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), ..., (5, 6, 7, 8). Эдгээр үйлдлийг харгалзан a, b, c, d, e удаа хийсэн гэе.

- 2-р нүдэнд $a + b = 30$, 3-р нүдэнд $a + b + c = 42$. Иймээс $c = 42 - 30 = 12$.
- 6-р нүдэнд $c + d + e = 36$, тэгэхээр $d + e = 36 - 12 = 24$.
- 7-р нүд зөвхөн сүүлийн хоёр төрлийн үйлдэлд багтдаг тул түүнд бичигдэх тоо $d + e = 24$.

Бодлого 3. 1, 2, 3, 4 цифрүүдийг ашиглан хоёроос бага цифр дор хаяж 1 удаа, гурваас бага цифр дор хаяж 2 удаа, дөрвөөс бага цифр дор хаяж 3 удаа оролцсон байхаар хэдэн дөрвөн оронтой тоо зохиож болох вэ?

Бодолт: $30n$, $20n^2$, $10n^3$ гэсэн гурван тоо ямар нэг дарааллаар куб, дөрөвдүгээр зэрэг, тавдугаар зэрэг болдог байх хамгийн бага натурал n -ийг олж.

1. n -ийг анхны үржигдэхүүнээр бичье. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $20 = 2^2 \cdot 5$, $10 = 2 \cdot 5$. Иймээс хамгийн бага n -д 2, 3, 5-аас өөр анхны үржигдэхүүн байх шаардлагагүй:

$$n = 2^a 3^b 5^c \quad (a, b, c \geq 0).$$

Тэгвэл

$$\begin{aligned} 30n &= 2^{a+1} 3^{b+1} 5^{c+1}, \\ 20n^2 &= 2^{2a+2} 3^{2b} 5^{2c+1}, \\ 10n^3 &= 2^{3a+1} 3^{3b} 5^{3c+1}. \end{aligned}$$

Санах дүрэм: Тоо k -р зэрэг болохын тулд анхны үржигдэхүүнүүдийнх нь бүх илтгэгч k -д хуваагддаг байх ёстой.

2. Боломжит дарааллуудыг тогтооё.

- $10n^3$ куб байж болохгүй. Учир нь 2-ын илтгэгч $3a + 1$ бөгөөд 3-д хуваагдахгүй.
- $20n^2$ дөрөвдүгээр зэрэг байж болохгүй. Учир нь 5-ын илтгэгч $2c + 1$ сондгой тул 4-д хуваагдахгүй.

Иймд зэргийн гурван боломжит хуваарилалт үлдэнэ.

3. Хамгийн бага илтгэгчүүдийг олж. Жишээ нь, $30n$ куб, $20n^2$ тавдугаар зэрэг, $10n^3$ дөрөвдүгээр зэрэг гэж үзье. Тэгвэл 2-ын илтгэгч a дараах нөхцөлийг хангана:

$$3 \mid (a + 1), \quad 5 \mid (2a + 2), \quad 4 \mid (3a + 1).$$

Эдгээрийг зэрэг хангах хамгийн бага $a = 29$. Үүнтэй адил 3-ын илтгэгчийн хувьд $b = 20$, 5-ынх $c = 17$ олдоно. Тэгэхээр энэ тохиолдолд $n = 2^{29} 3^{20} 5^{17}$.

Бусад хоёр тохиолдлыг мөн ижил аргаар шалгахад:

$30n$	$20n^2$	$10n^3$	(a, b, c)	Олдох n
Куб	5-р зэрэг	4-р зэрэг	$(29, 20, 17)$	$2^{29}3^{20}5^{17}$
4-р зэрэг	Куб	5-р зэрэг	$(23, 15, 43)$	$2^{23}3^{15}5^{43}$
5-р зэрэг	Куб	4-р зэрэг	$(29, 24, 49)$	$2^{29}3^{24}5^{49}$

4. Харьцуулъя. Гурав дахь тоо эхнийхээс том нь илэрхий. Хоёр дахь тоо эхнийхээс том, учир нь

$$\frac{2^{23}3^{15}5^{43}}{2^{29}3^{20}5^{17}} = \frac{5^{26}}{2^6 \cdot 3^5} > 1.$$

Иймд хамгийн бага утга нь $2^{29} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$

Бодлого 4. A нь гурван оронтой тоо. A тооны цифрүүдийн нийлбэрийг B , харин A тооны цифрүүдийн үржвэрийг C гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $A = B \cdot C$ байх бүх A тоог ол.

Бодолт: Нэгж урттай савхнуудаар 3×8 тэгш өнцөгт тор байгуулжээ. Өөрийгөө огтлоогүй битүү тахир шугам татахдаа **2-р мөрийн нүд бүрийн яг нэг талыг** ашиглах ёстой (бусад нүдэнд хэдэн ч тал ашиглаж болно). Хэдэн янзаар зурах вэ?

1	1	1	1	1	1	1	1

8 багана, 3 мөр

1. Дунд мөрийг босоогоор нэвтрэхгүй тохиолдол. Битүү шугам нь зөвхөн дээд мөрийн 8×1 тэгш өнцөгтийн хүрээ, эсвэл зөвхөн доод мөрийн тэгш өнцөгтийн хүрээ болж чадна. Нийт 2 арга.

2. Дунд мөрийг босоогоор нэвтрэх тохиолдол. Дунд мөрийн нүд бүрийн яг нэг талыг ашиглах ёстой тул шугам дунд мөрийг дайрсны дараа салаалж, өөрийгөө огтолж болохгүй. Үүнийг дагаж мөрдөхөд дунд мөр рүү зүүн захын эхний 2 баганын аль нэгээр орж, баруун захын сүүлийн 2 баганын аль нэгээр гарна.

Иймээс хоёр захад шугамыг холбох $2 \times 2 = 4$ төрлийн байрлал бий. Захын холболтуудын хооронд үлдэх дунд мөрийн нүд бүрд дээд талыг нь эсвэл доод талыг нь сонгох 2 боломжтой. Эдгээр сонголт бие биеэсээ хамаарахгүй.

Захын холболтын байдал	Чөлөөтэй сонгох нүд	Аргын тоо
Хоёр талдаа захын баганаар	6	$2^6 = 64$
Нэг талдаа 2 дахь баганаар (2 хувилбар)	5	$2 \cdot 2^5 = 64$
Хоёр талдаа 2 дахь баганаар	4	$2^4 = 16$

3. Бүх тохиолдлыг нэмье.

$$2 + 2^6 + 2 \cdot 2^5 + 2^4 = 2 + 64 + 64 + 16 = \boxed{146}.$$

146 арга