

**Бодлого 1.**  $n \geq 3$  ба  $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  нь  $1, 2, \dots, n$  тоонуудын сэлгэмэл байг. Хэрэв  $i < j$  ба  $a_i > a_j$  байвал  $(a_i, a_j)$  хосыг  $\sigma$  сэлгэмлийн **инверс** гэж нэрлэе.  $1, 2, \dots, n$  тоонуудын яг гурван инверстэй хэдэн сэлгэмэл байх вэ? Жишээлбэл  $1, 2, 3, 4, 5$  тоонуудын  $(2, 4, 3, 5, 1)$  сэлгэмэл нь  $(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (5, 1)$  гэсэн 5 инверстэй.

**Бодолт:**  $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  сэлгэмлийн хувьд  $S_i$ -ээр  $j < i$  байх ба  $a_j > a_i$  байх  $j$ -үүдийн тоог тэмдэглэе. Тэгвэл  $\sum_{i=1}^n S_i = 3$  байх бүх сэлгэмлийг тоолно.

**I тохиолдол.**  $S_i = 1, S_j = 1, S_k = 1$  байг. Энэ үед нийт  $C_{n-1}^3$  сэлгэмэл байна.

$(1; 2; 3; \dots; n)$  дарааллаас эхний  $(n-1)$  ширхэг тооноос 3 ширхгийг сонгож, тэдгээрийн байрыг  $1; 1; 1$ -ээр хойшлуулна. [Дараалал нь хойноос нь урагш нэг нэгээр хойшлуулна.] Зарим тохиолдлыг тайлбарлав.

$a < b < c$  үед  $(c+1; c); (b+1; b); (a+1; a)$  (бүгд дор хаяж хоёрын зөрөөтэй)

$a < a+1 < a+2$  үед  $(a+3; a+2) \quad (a+3; a+1) \quad (a+3; a)$

$a < b < b+1$  үед  $(b+2; b+1) \quad (b+2; b) \quad (a+1; a)$  ( $a, b$  нь хоёрын зөрөөтэй)

**II тохиолдол.**  $S_i = 2, S_j = 1$  байг.  $(n-2)^2$  байна. Учир нь  $(1; 2; \dots; n-2)$  тоонуудаас  $i$  тоог сонгон авъя.  $(1; 2; 3; \dots; n-1)$  тоонуудаас  $i$ -аас ялгаатай  $j$  тоо сонгон авах боломжийн тоо  $(n-2)^2$  болно.  $i$ -г 2 удаа хойшлуулж,  $j$ -г нэг байр ухраавал  $S_i = 2, S_j = 1$  байх сэлгэмэл үүснэ.

**III тохиолдол.**  $S_i = 3, n-3$  байна. Учир нь  $1; 2; \dots; n-3$  тоонуудаас нэг тоог 3 удаа хойшлуулна.

Иймд нийт нөхцөл хангах сэлгэмлийн тоо  $C_{n-1}^3 + (n-2)^2 + n-3 = \frac{n^3 - 7n}{6}$  болно.

**Дүгнэх аргачлал:** Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- (1)  $\sum_{i=1}^n S_i = 3$  байхыг хэлсэн бол 1 оноо
- (2)  $S_i = 1, S_j = 1, S_k = 1$  байх үед зөв тоолсон бол 2 оноо
- (3)  $S_i = 2, S_j = 1$  байх үед зөв тоолсон бол 2 оноо
- (4)  $S_i = 3$  байх үед зөв тоолсон бол 1 оноо
- (5) Шууд хариуг бичсэн бол оноо өгөхгүй.

**Рекуррент ашигласан бодолтын хувьд**

- (1) Инверс нь 1 байх сэлгэмлийн тоог зөв тооцоолсон бол 1 оноо
- (2) Инверс нь 2 байх сэлгэмлийн тоог зөв тооцоолсон бол 2 оноо
- (3) Инверс нь 3 байх сэлгэмлийн тооны рекуррентийг зөв тооцоолсон бол 2 оноо
- (4) Хариуг зөв олбол 2 оноо

(5) Шууд хариуг бичсэн бол оноо өгөхгүй.

**Бодлого 2.**  $p$  нь сондгой анхны тоо байг. Аливаа бүхэл  $n$ -ийн хувьд  $n^p - p^2$  тоо нь  $q$ -д хуваагддаггүй байх  $q$  анхны тоо олдохыг батал.

*Бодолт:* 1.  $N = \frac{p^p-1}{p-1} = 1 + p + p^2 + \dots + p^{p-1}$  гэж авъя.

2.  $N \equiv p + 1 \pmod{p^2}$  байна. Иймд  $N$ -ийн ямар нэг  $q$  анхны тоон хуваагчийн хувьд  $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$  байна. Ийм  $q$  тоог сонгон авъя. ( $q \mid N$ )

3. Эсрэгээс нь, ямар нэг  $n$  тооны хувьд  $n^p \equiv p^2 \pmod{q}$  гэж үзье.

4.  $q \mid N$  тул  $p^p - 1 \equiv 0 \pmod{q}$  буюу  $p^p \equiv 1 \pmod{q}$  байна. Эндээс:

$$(n^p)^p \equiv (p^2)^p \pmod{q} \implies n^{p^2} \equiv (p^p)^2 \equiv 1 \pmod{q}$$

5. Фермагийн бага теоремоор  $n^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$  байна. Тиймээс  $n$ -ийн зэрэг нь  $p^2$  ба  $q-1$  тоонуудын ХИЕХ болох  $\gcd(p^2, q-1)$ -д мөн адил  $1 \pmod{q}$  утга өгнө.

6. Бид анх  $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$  гэж сонгосон тул энэхүү ХИЕХ нь зөвхөн 1 эсвэл  $p$  байж болно. Аль ч тохиолдолд ХИЕХ нь  $p$ -д хуваагдах тул:

$$n^p \equiv 1 \pmod{q}$$

7. Эхний нөхцөлөөр  $n^p \equiv p^2 \pmod{q}$  гэсэн тул  $p^2 \equiv 1 \pmod{q}$  буюу  $q \mid (p-1)(p+1)$  болно. Эндээс 2 боломж гарна:

- Хэрэв  $q \mid (p-1)$  бол:  $p \equiv 1 \pmod{q}$ . Үүнийг  $N$ -д орлуулбал  $N \equiv 1 + 1 + \dots + 1 = p \pmod{q}$  болно.  $q \mid N$  тул  $p \equiv 0 \pmod{q} \implies q = p$  байна. Гэвч  $N \equiv 1 \pmod{p}$  тул энэ нь зөрчил юм.
- Хэрэв  $q \mid (p+1)$  бол:  $p \equiv -1 \pmod{q}$ .  $p$  нь сондгой тоо тул  $N \equiv 1 + (-1) + 1 - \dots + (-1)^{p-1} = 1 \pmod{q}$  болж мөн л  $q \mid N$  гэдэгтэй зөрчилдөнө.

8. Аль ч тохиолдолд зөрчил үүсэж байгаа тул анхны таамаглал буруу бөгөөд  $n^p \equiv p^2 \pmod{q}$  байх  $n$  хэзээ ч олдохгүй.

**Дүгнэх аргачлал:** Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- (1)  $N = \frac{p^p-1}{p-1}$  илэрхийллийг сонгон авч,  $N \equiv p + 1 \pmod{p^2}$  болохыг харуулахад 2 оноо.
- (2)  $N$  нь  $p^2$ -д хуваахад 1 үлдэгдэл өгөхгүй анхны  $q$  хуваагчтай гэдгийг хэлэхэд 1 оноо.
- (3)  $n^p \equiv p^2 \pmod{q}$  гэж таамаглаад, Фермагийн бага теорем ашиглан  $n^p \equiv 1 \pmod{q}$  болохыг батлахад 2 оноо.
- (4)  $q \mid (p-1)$  болон  $q \mid (p+1)$  үед  $q \mid N$  нөхцөлтэй зөрчилдөж байгааг гүйцэд харуулахад 2 оноо.
- (5) Зөвхөн баталгааны санаа бичсэн эсвэл шууд дүгнэлт гаргасан тохиолдолд оноо өгөхгүй.
- (6) Тооцооллын болон логикийн жижиг алдаа бүрд -1 оноо.

**Бодлого 3.**  $ABCD$  параллелограмм өгөгджээ.  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойргийн  $B$  оройг агуулаагүй  $AC$  нумын дундаж цэгийг  $M$  гээ.  $AD, CD$  шулуунууд дээр  $ME = MD = MF$  байхаар харгалзан  $E, F$  цэгүүдийг авав. Тэгвэл  $B, M, E, F$  цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

**Бодолт:**  $M$  төвтэй,  $ME$  радиустай тойргийг  $\Omega$  гээ.  $M$  нь  $AC$  нумын дундаж цэг тул  $MA = MC$ . Иймээс  $A$  ба  $C$  цэгүүдийн  $\Omega$  тойргийн хувьд зэрэг тэнцүү:

$$AE \cdot AD = MA^2 - ME^2 = MC^2 - ME^2 = CF \cdot CD.$$

Параллелограммд  $AD = BC$ ,  $CD = AB$  тул  $AE \cdot BC = CF \cdot AB$ , өөрөөр хэлбэл  $\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CB}$ . Мөн  $\angle BAE = \angle BCF$  тул  $\triangle ABE \sim \triangle CBF$ , иймээс  $\angle ABE = \angle CBF$ .

$\angle ABC$ -ийн биссектрис  $BL$  нь тойргийг  $B$ -г агуулаагүй  $AC$  нумын дундаж цэгт огтолно. Тэр цэг ба  $M$  нь диаметрийн төгсгөлүүд тул  $BL \perp BM$ .  $\angle ABE = \angle CBF$  тул  $BL$  нь  $\angle EBF$ -ийн биссектрис болох ба иймээс  $BM$  нь  $\angle EBF$ -ийн биссектрис.

$\triangle EMB, \triangle MFB$  гурвалжнуудын хувьд синусын теорем бичвэл

$$\frac{\sin \angle MEB}{BM} = \frac{\sin \angle EBM}{EM} = \frac{\sin \angle FBM}{FM} = \frac{\sin \angle MFB}{BM}$$

буюу  $\sin \angle MEB = \sin \angle MFB$  болно. Эндээс  $\angle MEB + \angle MFB = 180^\circ$  эсвэл  $\angle MEB = \angle MFB$  байна. Эхний тохиолдолд бодлого бодогдоно. Харин  $\angle MEB = \angle MFB$  байвал  $D, M, B$  1 шулуун дээр оршино. Цаашилбал  $\angle DEM = \angle DFM$  учраас  $\angle EDM = \angle MDF$  болж  $\angle EAB = \angle EMB$  буюу  $MAEB$  нэг тойрог дээр орших ба нөгөө талаас  $MCFB$  нэг тойрог дээр оршино гэдгээс бодлого бодогдоно.

**Дүгнэх аргачлал:** Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

(1) Байгуулалт 3 оноо.

(2) Үнэлгээ 4 оноо.

(3) Жижиг алдаа -1 оноо.

**Бодлого 4.**  $P(x)$  нь таван зэргийн, бүхэл коэффициенттой олон гишүүнт байг. Хэрэв  $x \neq y$  байх бүхэл тоон  $x, y$  төгсгөлгүй олон хосуудын хувьд  $xP(x) = yP(y)$  нөхцөл биелдэг бол  $P(x)$  олон гишүүнт бүхэл тоон язгууртай болохыг батал.

**Бодолт:** Бид батлах зүйлийг бүх сондгой зэргийн  $P(x)$  олон гишүүнтүүдийн хувьд баталъя. Хэрэв  $x = 0, y \neq 0$  нь  $xP(x) = yP(y)$  нөхцөлийг хангах ялгаатай бүхэл тоон хос олддог бол  $P(y) = 0$  болох тул баталгаа дуусна. Бусад тохиолдолд, бодлогын нөхцөлийг хангах 0-ээс ялгаатай бүхэл тоон хос  $(x, y)$  төгсгөлгүй олон олдоно.  $n \geq 1$  ба  $a_i \in \mathbb{Z}, a_{2n-1} \neq 0$  байх

$$P(x) = a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_0$$

олон гишүүнт авч үзье. Тэгвэл

$$\begin{aligned} xP(x) - yP(y) &= a_{2n-1}(x^{2n} - y^{2n}) + a_{2n-2}(x^{2n-1} - y^{2n-1}) + \dots + a_0(x - y) \\ &= (x - y) \left( a_{2n-1}(x^{2n-1} + x^{2n-2}y + \dots + y^{2n-1}) \right. \\ &\quad \left. + a_{2n-2}(x^{2n-2} + x^{2n-3}y + \dots + y^{2n-2}) + \dots + a_0 \right) \end{aligned}$$

болно. Иймд  $x \neq y$  тул

$$a_{2n-1}(x+y)(x^{2n-2} + x^{2n-4}y^2 + \dots + y^{2n-2}) = -(a_{2n-2}(x^{2n-2} + x^{2n-3}y + \dots + y^{2n-2}) + \dots + a_0)$$

болно. Одоо  $a_{2n-1} \neq 0$  ба  $a_{2n-1} \in \mathbb{Z}$  тул  $|a_{2n-1}| \geq 1$  байна. Түүнчлэн бүх  $k, \ell \geq 0$ -ийн хувьд  $x^{2k}y^{2\ell} \geq 0$  тул

$$|x^{2n-2} + x^{2n-4}y^2 + \dots + y^{2n-2}| \geq |x^{2n-2}|$$

биелнэ.  $|x| \geq |y|$  гэдгээр  $i \geq j$  үед  $|x^i| \geq |x^j|$  болохыг анхаарвал

$$\begin{aligned} |x+y||x^{2n-2}| &\leq |a_{2n-1}(x+y)(x^{2n-2} + x^{2n-4}y^2 + \dots + y^{2n-2})| \\ &= |a_{2n-2}(x^{2n-2} + x^{2n-3}y + \dots + y^{2n-2}) + \dots + a_0| \\ &\leq |a_{2n-2}(2n-1)x^{2n-2}| + |a_{2n-3}(2n-2)x^{2n-2}| + \dots + |a_0(1)x^{2n-2}| \\ &\leq ((2n-1)|a_{2n-2}| + (2n-2)|a_{2n-3}| + \dots + |a_0|)|x^{2n-2}| \end{aligned}$$

гарна. Гэтэл  $x \neq 0$  тул хоёр талыг  $|x^{2n-2}|$ -д хуваавал

$$|x+y| \leq (2n-1)|a_{2n-2}| + (2n-2)|a_{2n-3}| + \dots + |a_0|$$

гэж зааглагдана. Иймд төгсгөлгүй олонлогийн Дирихлейн зарчмаар  $x+y = c$  ба  $xP(x) = yP(y)$  нөхцөлийг хангах  $(x, y)$  хос төгсгөлгүй олон оршин байх тийм бүхэл тоо  $c$  олдоно. Өөрөөр хэлбэл,  $xP(x) = (c-x)P(c-x)$  тэнцэтгэл төгсгөлгүй олон  $x$ -ийн хувьд биелнэ.  $P(x)$  нь олон гишүүнт энэ нь адилтгал биелэх буюу  $x \in \mathbb{R}$  бүрийн хувьд тэнцэтгэл байна. Хэрэв  $c \neq 0$  бол  $x = 0$ -ийг орлуулбал  $cP(c) = 0 \implies P(c) = 0$  болж баталгаа дуусна. Хэрэв  $c = 0$  бол  $xP(x) = -xP(-x) \implies P(x) = -P(-x)$  болох бөгөөд  $0$  нь  $P(x)$ -ийн язгуур болно.

**Дүгнэх аргачлал:** Бүтэн бодолт 7 оноо. Хэсэгчилсэн оноог дараах байдлаар өгнө.

- (1)  $x = 0, y \neq 0$  эсвэл  $c = 0$  тохиолдолд  $P(y) = 0$  эсвэл  $0$  нь  $P$ -ийн язгуур болохыг амархан шалгах санааг гаргахад 1 оноо.
- (2)  $xP(x) - yP(y)$  илэрхийллийг  $(x-y)$  болон бусад олон гишүүнтийн үржвэрт зөв зааглаж,  $a_{2n-1}(x+y)(\dots)$  хэлбэрээр тэнцэтгэлийг шилжүүлэн бичихэд 1 оноо.
- (3) Гурвалжны тэнцэтгэл биш ба  $|x^{2n-2} + x^{2n-4}y^2 + \dots + y^{2n-2}| \geq |x^{2n-2}|$  үнэлгээг ашиглан  $|x+y| \leq (2n-1)|a_{2n-2}| + \dots + |a_0|$  гэсэн дээд заагийг бүрэн баталж зааглахад 2 оноо.
- (4) Төгсгөлгүй олонлогийн Дирихлейн зарчмаар  $x+y = c$  байх тийм бүхэл тоо  $c$  олдож,  $xP(x) = (c-x)P(c-x)$  адилтгал гарна гэдгийг үндэслэлтэй харуулахад 2 оноо.
- (5)  $c \neq 0$  ба  $c = 0$  тохиолдлуудыг тусад нь авч үзэн  $P(x)$  олон гишүүнт заавал язгууртай болохыг баталж дуусгахад 1 оноо.
- (6) Алгебрын хувиргалт болон зэргийн задрал дээр томоохон алдаа гаргаж үнэлгээ буруу болсон бол -1 оноо хасна.