ВИЕТИЙН ТЕОРЕМ

Элсэлтийн шалгалтад бэлдэх А ангийн 2025.10.08-ны хичээлийн материал

1. $2x^2+4x-16=0$ тэгшитгэлийн шийдүүд x_1, x_2 бол $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ илэрхийллийн утгыг ол.

Виетийн теоремоор

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-2 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=-8 \end{cases}$$

байна. Өгөгдсөн илэрхийллээ ерөнхий хуваарь өгч нэмбэл

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{\overbrace{x_2+x_1}^{-2}}{\underbrace{x_1x_2}_{-8}}=\frac{1}{4}$$

2. $-3x^2+36x-96=0$ тэгшитгэлийн шийдүүд x_1, x_2 бол $x_1^2+x_2^2$ илэрхийллийн утгыг ол.

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ байдаг тул x_1+x_2 ба x_1x_2 илэрхийллийн утгуудыг олвол бодлогоо бодож чадна. Виетийн теоремоор

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=12 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=32 \end{cases}$$

байна. Иймд

$$x_1^2+x_2^2=(\underbrace{x_1+x_2}_{12})^2-2\underbrace{x_1x_2}_{32}=$$

$$=144-2\cdot 32=80.$$

3. $-8x^2-8x+16=0$ тэгшитгэлийн шийдүүд x_1, x_2 бол $x_1^3+x_2^3$ илэрхийллийн утгыг ол.

Эхлээд $x_1^2+x_2^2$-н утгыг олъё. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ байдаг тул x_1+x_2 ба x_1x_2 илэрхийллийн утгуудыг олвол бодлогоо бодож чадна. Виетийн теоремоор

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-1 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=-2 \end{cases}$$

байна. Иймд

$$x_1^2+x_2^2=(\underbrace{x_1+x_2}_{-1})^2-2\underbrace{x_1x_2}_{-2}=$$

$$=1+2\cdot 2=5.$$

Одоо $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$ томьёог ашиглавал

$$x_1^3+x_2^3=$$

$$=(\underbrace{x_1+x_2}_{-1})(\underbrace{x_1^2+x_2^2}_{5}-\underbrace{x_1x_2}_{-2})=$$

$$=-1\cdot(5+2)=-7.$$

4. $9x^2 + 7x - 1 = 0$ тэгшитгэлийн хувьд $x_1x_2 - x_1 - x_2$ утгыг олоорой.

Виетийн теоремоор

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{9}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{9}$$

байна. Өгөгдсөн илэрхийлэл $x_1x_2 - x_1 - x_2 = x_1x_2 - (x_1 + x_2)$ тул

$$\underbrace{x_1x_2}_{-\frac{1}{9}} - (\underbrace{x_1 + x_2}_{-\frac{7}{9}}) = -\frac{1}{9} + \frac{7}{9} = \frac{2}{3}$$

байна.

5. $f(x) = x^2 + px + 34$ олон гишүүнт хэдэн хос натурал язгууртай вэ?

Виетийн теоремоор $x_1x_2 = 34$ байх ёстой. 34 нь натурал тул $(1, 34)$ $(2, 17)$ буюу 2 хос натурал шийдтэй.

6. α ба β нь $x^2 - x - 1 = 0$ тэгшитгэлийн шийдүүд бол

$$\frac{-2\alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta}{\beta^2 + 4\alpha\beta + \alpha^2}$$

илэрхийллийн утгыг ол.

Эхлээд виетийн теорем бичвэл $\alpha + \beta = 1$ ба $\alpha\beta = -1$ байх бөгөөд эндээс

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta =$$

$$= (1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3$$

гэж гарна. Одоо өгөгдсөн илэрхийллээ хялбарчлаад бодвол

$$\frac{-2\alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta}{\beta^2 + 4\alpha\beta + \alpha^2} =$$

$$= \frac{-2\alpha\beta(\beta + \alpha)}{\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2 + 2\alpha\beta} =$$

$$= \frac{-2\alpha\beta(\beta + \alpha)}{(\beta + \alpha)^2 + 2\alpha\beta} = (*)$$

болно. Мэдээж, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ ба $\alpha^2 + \beta^2 = 3$ тул

$$(*) = \frac{-2 \cdot (-1) \cdot (1)}{1 + 2 \cdot (-1)} = -2$$

7. $x^2 + (a + 6)x + a + 4 = 0$ тэгшитгэлийн хоёр язгуурын квадратын нийлбэр нь хамгийн бага байхаар a параметрийн утгыг олоорой.

Виетийн теоремоор

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a - 6 \\ x_1x_2 = a + 4 \end{cases}$$

байх ёстой.

$$x_1^2 + x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$$

$$= (-a - 6)^2 - 2(a + 4) =$$

$$= a^2 + 10a + 44$$

болно. Энэ илэрхийлэл дээр бүтэн квадрат ялгавал

$$a^2 + 2 \cdot 5 \cdot a + 25 + 19 =$$

$$= (a+5)^2 + 19$$

болно. Энэ илэрхийлэл хамгийн бага утгатай байхын тулд $a+5=0$ буюу $a=-5$ байх хэрэгтэй болно. Илэрхийллийн хамгийн бага утга нь $a=-5$ үед 19 байна.

8. $a, b, c \in \mathbb{N}$ тоонууд бөгөөд b, c нь харилцан анхны тоонууд. $\begin{cases} ab = 4 \\ ac = 8 \end{cases}$ байх b, c язгууртай $f(x) = x^2 + px + q$ функцийг тодорхойлоод $-7p - 6q$ илэрхийллийн утгыг ол.

Өгөгдсөн хоёр тэнцэтгэлийг хооронд харьцуулвал

$$\frac{ab}{ac} = \frac{4}{8} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{1}{2}$$

байна. $(b, c) = 1$ тул $b = 1$, $c = 2$ байх нь ойлгомжтой. Эдгээр нь $f(x) = x^2 + px + q$ гурван гишүүнтийн язгуур болно гэдгээс виетийн теоремоор

$$\begin{cases} 1 + 2 = -p \\ 1 \cdot 2 = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -3 \\ q = 2 \end{cases}$$

гэж олдно. Эндээс

$$-7p - 6q = -7(-3) - 6(2) = 9.$$

9. $f(x) = x^3 + mx^2 + 2x - 16$ олон гишүүнтийн язгуурууд $x_1 = -2$, x_2, x_3 бол $x_1 + x_2 + x_3$ нийлбэрийг ол.

Куб тэгшитгэлийн хувьд виетийн теорем бичвэл

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -m \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2 \\ x_1x_2x_3 = 16 \end{cases}$$

бөгөөд гурав дахь тэгшитгэлд $x_1 = -2$-г орлуулвал

$$-2 \cdot x_2x_3 = 16 \Rightarrow x_2x_3 = -8$$

болно. Үүний хоёр дахь тэгшитгэлд орлуулвал

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \underbrace{x_2x_3}_{-8} =$$

$$= \underbrace{x_1}_{-2}(x_2 + x_3) - 8 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 + x_3 = -5$$

гэж гарна. Энийг эхний тэнцэтгэлдээ орлуулвал

$$\underbrace{x_1}_{-2} + \underbrace{x_2 + x_3}_{-5} = -7$$

гэж олдоно. Өөрөөр хэлбэл, $m = 7$ байна.

10. x-ийн хувьд квадрат тэгшитгэл $C_n^2 \cdot x^2 - C_n^3 \cdot x + C_n^4 = 0$ гэж өгсөн ба шийдүүдийн үржвэр 13 бол нийлбэрийг нь олъё. Квадрат тэгшитгэлийн шийдийг x_1, x_2 гэе. $x_1x_2 = 13$ нөхцөлөөс $n^2 + \boxed{\text{A}}n + \boxed{\text{B}} = 0$ тэгшитгэл гарах ба эндээс $n = \boxed{\text{C}}$ гэж олдоно. Иймд $x_1 + x_2 = \boxed{\text{D}}$ гэж гарна.

Хэсэглэлийн $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ томьёогоор тэгшитгэлээ хувиргавал

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 0$$

болно. Одоо виетийн теоремоор шийдүүдийн үржвэр нь $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ байх ёстой тул

$$\frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}}{\frac{n(n-1)}{2!}} = \frac{(n-2)(n-3)}{12} = 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-2)(n-3) = 156 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n - 150 = 0$$

тэгшитгэл үүснэ. Энэ тэгшитгэлийг бодвол $n_{1,2} = \dfrac{5 \pm 25}{2}$ гарах бөгөөд n натурал тоо тул $n = \dfrac{5+25}{2} = 15$ гэж олдоно. Одоо шийдүүдийн нийлбэрээ виетийн теоремоор $(x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a})$ олвол

$$x_1 + x_2 = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}}{\frac{n(n-1)}{2!}} =$$

$$= \frac{n-2}{3} = \frac{15-2}{3} = \frac{13}{3}$$

байна.